View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Funes

LAS RAÍCES EUCLIDIANAS DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA CARTESIANA. UNA PERSPECTIVA HISTÓRICOEPISTEMOLÓGICA

Erdulfo Ortega
Universidad de Nariño
veortegap@hotmail.com

En el siglo XVII se inicia el período histórico de las matemáticas de las magnitudes variables y en él, el punto de viraje lo constituye la idea de variable introducida por Descartes. Durante ese siglo se fueron encajando enfáticamente los métodos matemáticos en las ciencias naturales. Descartes pensaba que las propiedades de divisibilidad y movilidad, propias de la naturaleza de la materia, las deberían reflejar las matemáticas como ciencia universal; con tal propósito eligió los segmentos como forma general de las magnitudes geométricas. Define entonces, en *La Geometría*, la estructura algebraica de los segmentos como elemento fundamental de su propuesta a partir de una reflexión en torno a la composición de los *Elementos* de Euclides.

PRESENTACIÓN

Cuando se hace referencia al origen de la geometría analítica, se afirma que el punto de partida lo constituyó la introducción del álgebra en la geometría; acontecimiento este que se llevó a cabo por obra de Descartes al vincular los recursos de la primera con los desarrollos de la segunda, lo cual permitió alcanzar una unidad de síntesis que favoreció el rápido advenimiento de nuevas creaciones como el cálculo infinitesimal. Para realizar esta hazaña, que significó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega, Descartes comenzó considerando la voluminosidad tridimensional como parte constitutiva de la naturaleza de la materia, cuyas propiedades más importantes son la divisibilidad y la movilidad. Planteó que las matemáticas, en su calidad de ciencia universal que involucra todo lo relacionado con el orden y la medida, además de lo numérico y de lo geométrico, debían reflejar tales propiedades; esta propuesta constituyó un paso inicial en la ruta hacia la matemática moderna que llevó a la disciplina a uno de los lugares más destacados entre todas las ciencias. La geometría analítica, en consecuencia, no es tan solo la fusión de dos ramas de las matemáticas sino que constituye el punto de unificación de esta ciencia y la consolidación de sus fundamentos en principios racionales y lógi-

Ortega, E. (2013). Las raíces euclidianas de la geometría analítica cartesiana. Una perspectiva históricoepistemológica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 117-126). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

cos. Las ideas generales lograron una interpretación concreta hacia 1637 con el *Discurso del Método* del cual forma parte *La Geometría*. Llama la atención que la citada ruptura metodológica tuviera origen en la monumental obra de los *Elementos*, cuestión esta que se discutirá en el desarrollo de este escrito.

La Geometría (Descartes, 1637/1947) está constituida por tres libros. El primero lleva por título *De los problemas que pueden construirse sin emplear más que círculos y líneas rectas*. El segundo, titulado *De la naturaleza de las líneas curvas*, presenta un estudio más detallado de las curvas de diferentes órdenes, especialmente de las de grado superior, de su clasificación y de la revelación de sus propiedades; sobre todo, de la construcción y de las propiedades de tangentes y normales, líneas estas cuya importancia deriva de los problemas de la reflexión de la luz sobre las superficies curvas. Descartes divide todas las curvas en dos clases, según la posibilidad de llevar a cabo su investigación con los recursos de que disponía. El tercero está dedicado a la *Construcción de problemas sólidos o más que sólidos,* lo cual lo conduce al estudio de la resolución de ecuaciones, a la discusión de sus raíces y de las relaciones entre los coeficientes. Muestra que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado y presenta luego su famosa regla de los signos. Utiliza junto a los recursos algebraicos, los lugares geométricos.

En este artículo solo se tomará en consideración la temática en torno al primer libro de *La Geometría.* Se pretende mostrar cómo Descartes hizo la formulación de una perspectiva distinta para la geometría, principalmente, a partir de una nueva interpretación de la geometría euclidiana, la cual le permitió proponer una lectura algebraica de esta disciplina. Este hecho no solo tiene que ver con las reglas del método sino ante todo con una nueva lectura de la geometría de Euclides, que posibilitó el proceso de modernización en las matemáticas, fundamentado en la correspondencia entre geometría y álgebra como punto de partida hacia la matemática formal.

De los problemas que se pueden construir sin emplear más que círculos y líneas rectas

En este libro, Descartes inicia con la exposición de los procedimientos conocidos para resolver geométricamente las operaciones de la aritmética. En efecto, afirma que todos los problemas de geometría pueden reducirse fácilmente a tales términos (círculos y líneas rectas), que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos. Puntualiza luego:

> *Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las operaciones de geometría.* Y así como la aritmética no comprende más que cuatro o cinco operaciones, que son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces, que pueden tomarse como una especie de división, así también no hay otra cosa que hacer en geometría, respecto a las líneas que se buscan, para prepararlas a ser conocidas… (Descartes, 1637/1947, p. 49)

Al darse cuenta de que la geometría euclidiana trata ante todo del estudio de las magnitudes continuas, Descartes encuentra el primer tropiezo que proviene del carácter no homogéneo de las distintas magnitudes. Este hecho se pone de manifiesto, por ejemplo, en la imposibilidad de identificar una línea con un área, o esta con un ángulo, de tal manera que las distintas operaciones se pueden realizar con algunas magnitudes continuas, pero no con otras.

Es objetivo de Descartes, como lo señala Álvarez (2000), eliminar la diferencia entre las distintas magnitudes geométricas mediante la búsqueda de una *forma única de la magnitud*. Lo logra eligiendo los segmentos como forma general de las magnitudes geométricas. Así, le fue posible definir un producto de segmentos con la propiedad de cerradura o clausura y en un sentido análogo la construcción, para las mismas, de la cuarta magnitud proporcional.

Surge entonces la estructura algebraica, definida entre segmentos, como el punto de partida para el propósito de Descartes de la construcción de los problemas geométricos. Al definir las primeras operaciones con líneas, en el primer libro, no hace referencia ni a la suma ni a la diferencia; sin embargo, cuando define la multiplicación y la división recurre a un segmento unidad (Descartes, 1637/1947).

> *La multiplicación*. Sea, por ejemplo, AB la unidad, y que deba multiplicarse BD por BC; no tengo más que unir los puntos A y C, luego trazar DE paralela a CA, y BE es el producto de esta multiplicación. (p. 50) (Figura 1)

> *La división de segmentos*. O bien, si debe dividirse BE por BD, habiendo unido los puntos E y D, se traza AC paralela a DE y BC es el resultado de esta división. (p. 50) (Figura 1)

> *La extracción de la raíz cuadrada.* O, si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con este punto como centro se traza el círculo

FIH; luego elevando desde el punto *G* una línea recta, con ángulos rectos sobre *FH*, hasta *I*, es *GI* la raíz buscada. No digo nada aquí de la raíz cúbica, ni de las otras, pues de ellas trataré detalladamente más adelante. (p. 51) (Figura 2)

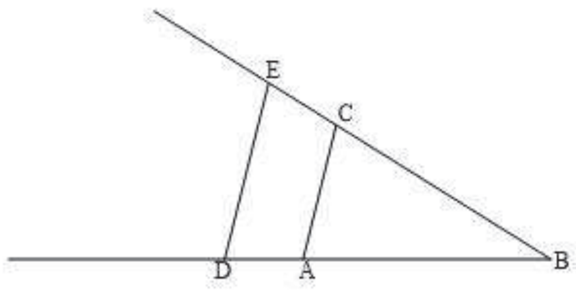


Figura 1: Multiplicación y división de segmentos

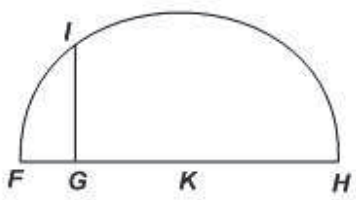


Figura 2: Extracción de la raíz cuadrada

LA TÉCNICA DE LA PROPUESTA DE DESCARTES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

El punto de partida de la propuesta de Descartes para la construcción de los problemas geométricos lo constituyó el hecho de haber dotado a los segmentos de una estructura algebraica, mediante la operación de multiplicación con la propiedad de clausura.

En cuanto a las operaciones de suma y diferencia de segmentos, Descartes no hace alusión alguna, pues la explicación está implícita en la proposición 3 del Libro I de los *Elementos.* En cambio, para definir las operaciones de multiplicación y división Descartes procede como se indica a continuación:

Dados dos segmentos a y b, para hallar *el producto* c de *la multiplicación* de a y b, utilizando el segmento *unidad* u, recurre al teorema de Tales, o a la proposición 12 del Libro VI de los *Elementos*, que permite hallar dados tres segmentos, la cuarta proporcional. Es decir, c satisface la proporción, que en términos modernos se expresa:

$$\frac{u}{a} = \frac{b}{c}, \text{ de donde } c = ba \quad \text{(ver Figura 3).}$$

En otras palabras, c es el cuarto proporcional de los segmentos u, a, b. Análogamente, se obtiene el cociente:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{u}, \text{ de donde } d = \frac{a}{b} \quad \text{(ver Figura 4).}$$

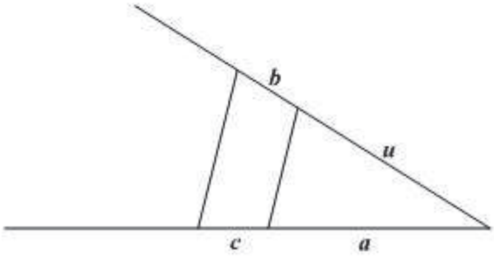


Figura 3: Multiplicación de los segmentos a y b

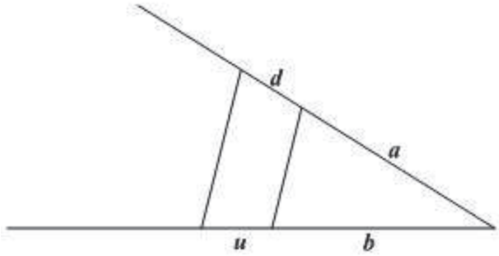
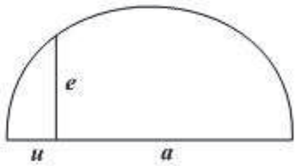


Figura 4: División de los segmentos a y b

La extracción de la raíz cuadrada del segmento *a* se encuentra por el cálculo de la media proporcional de *a* y *u*, a partir del problema 14 del Libro II y del problema 13 del Libro VI, de los *Elementos*.



$$\frac{a}{e} = \frac{e}{u}, \text{ de donde } e = \sqrt{a} \quad \text{(ver Figura 5)}$$

Figura 5: Extracción de la raíz cuadrada

Respecto a los resultados anteriores, afirma Álvarez (2000) que no pueden interpretarse simplemente en términos de conveniencia, por comodidad de las expresiones, sino que, ante todo, informan sobre una lectura nueva de *la teoría de las proporciones de Eudoxio,* que constituye el Libro V de los *Elementos*.

El problema de Pappus

Descartes expuso detalladamente las reglas generales de la geometría analítica en la resolución de problemas difíciles. Uno de tales problemas es el clásico problema de Pappus, mediante el cual realizó la transformación algebraica de un problema geométrico.

Señalaba Pappus que Euclides ya había intentado, sin éxito, resolver el problema y en el mismo sentido se hace referencia a Apolonio. Dicho problema se planteaba así: Dadas cuatro rectas en posición, encontrar un punto desde el cual se puedan trazar rectas que formen ángulos dados con las cuatro rectas dadas y que satisfagan la condición de que el paralelogramo formado por dos de esas rectas se encuentre en una razón dada con el paralelogramo formado por las otras dos. La posición de las cuatro rectas se muestra en la Figura 6.

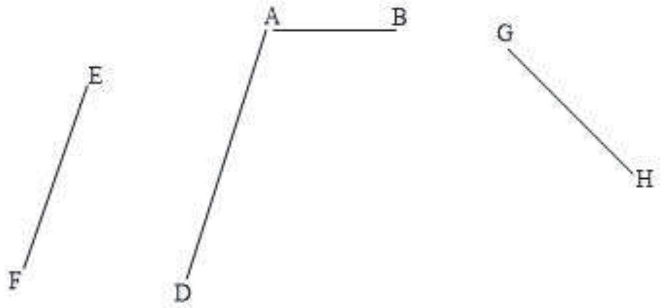


Figura 6: Las cuatro rectas en posición, en el problema de Pappus

Este problema (Figura 7), en *La Geometría*, está enunciado de la siguiente manera:

> Sean *AB*, *AD*, *EF*, *GH*, etc., varias líneas dadas y debe encontrarse un punto, como C, del cual, trazando otras líneas a las dadas, como *CB*, *CD*, *CF* y *CH*, de manera que los ángulos *CBA*, *CDA*, *CFE*, *CHG*, etc., sean dados, y que el producto de la multiplicación de una parte de estas líneas, sea igual al producto de la multiplicación de las otras; o bien que ellas tengan otra proporción dada, lo que no hace, en modo alguno, más difícil el problema. (pp. 65-66)

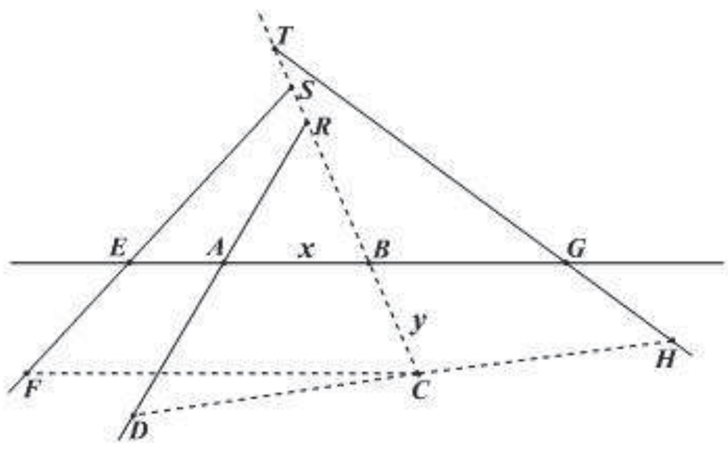


Figura 7: El problema de Pappus

Pappus afirmaba que la solución de este problema para tres o cuatro rectas, era el lugar geométrico de los puntos que forman una cónica (parábola, hipérbola o elipse). Propuso además, una generalización del mismo hasta para seis rectas, pero decía que no sería posible generalizarlo para más de seis rectas en posición, por cuanto, desde la época de Euclides, se sabía que el producto de dos rectas era una superficie y el de tres, un paralelepípedo; sin embargo, para un número mayor de rectas, Descartes expresaba:

> Si fueran más de seis rectas, ya no puede decirse que se da la relación entre un objeto comprendido por cuatro rectas y otro formado por las otras, pues no hay nada que esté formado por más de tres dimensiones. (Descartes, 1947, p. 61)

Es de destacar que en virtud de la estructura algebraica de la que están dotadas las operaciones con segmentos, la exposición del problema, hecha por Descartes, permitía incluir un número arbitrario de rectas. Este hecho implicaba trascender la concepción de dimensión que tenían los griegos.

En cuanto al proceso de resolución del problema, Descartes se apoyó en Viète, como punto de partida para su técnica algebraica. Expuso luego las reglas de formación de las ecuaciones de curvas geométricas. Así, para resolver un problema o el problema para el caso de un número cualquiera, n, de rectas, en el libro primero de *La Geometría*, señala los siguientes pasos:

1. Considerar el problema como si estuviera resuelto.

2. Designar con letras las líneas involucradas en el problema, tanto las conocidas como las desconocidas.

3. Encontrar la relación de dependencia que existe entre las líneas conocidas y las desconocidas.

4. Expresar de dos maneras distintas una misma relación entre las líneas, cuya igualdad constituye una ecuación.

5. Resolver la ecuación. Los requerimientos de construcción del problema están dados por la posibilidad y por las condiciones de resolución de la ecuación.

Para hallar la solución del problema, Descartes, siguiendo los cinco pasos anteriores, tomó las cuatro rectas dadas en posición AB, AD, EF y GH, y desde el punto C, que supuestamente satisfacía las condiciones del problema, trazó las líneas CB, CH, CF y que forman con las rectas dadas los ángulos dados CBA, CDA, CFE y CHG (ver Figura 7). Sin pérdida de generalidad, es posible suponer que el producto de dos de ellas es igual al producto de las otras dos:

$$CB \times CH = CD \times CF$$

De acuerdo con el segundo de los cinco pasos anteriores, Descartes designó:

$$AB = x \text{ y } BC = y$$

Como los ángulos del triángulo *ABR* son conocidos, entonces también se conoce la relación que hay entre los lados *AB* y *BR*. Luego, eligiendo (como parámetro) una cantidad *z*, se puede encontrar la magnitud *b* como la cuarta proporcional, por lo cual:

$$\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$$

Puesto que $AB = x$, pudo escribir (de acuerdo con la Figura 7):

$$BR = \frac{bx}{z} \text{ y } CR = y + \frac{bx}{z}$$

De la misma manera, procediendo con el triángulo *DRC* y utilizando el mismo parámetro *z*, obtuvo la proporción:

$$\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}, \text{ de donde: } CD = \frac{cCR}{z}; \text{ es decir: } CD = \frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$$

Escribiendo en términos del simbolismo moderno lo expresado por Descartes, para el caso de las longitudes de los segmentos encontrados, se tiene que:

$$CH = \alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1$$
$$CD = \alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2$$
$$CF = \alpha_3 x + \beta_3 y + \delta_3$$
$$CB = y$$

Estas ecuaciones expresan las relaciones entre formas geométricas (magnitudes geométricas, longitudes de segmentos) y formas algebraicas (expresiones afines). Esta representación literal le permitió a Descartes encontrar las relaciones entre las magnitudes del problema.

CONCLUSIONES

Es importante tener en cuenta, como lo señala Álvarez (2000), que la introducción del álgebra en la geometría fue posible a partir de una revaloración del proyecto que, para la propia geometría, se encuentra plasmado en el texto de los *Elementos* de Euclides. Al hacer dicha lectura, Descartes descubrió un tratado que, por una parte, estableció el fundamento de la tradicional división entre aritmética y geometría, y, por otra, instituyó el tratamiento preciso de cada una de ellas. De la misma manera, encontró la clave que permitió percibir la relación entre estas dos disciplinas y, al mismo tiempo, tratarlas bajo una nueva visión que hizo posible su integración.

Por su parte, Malagón y Valoyes (2011) sostienen que Descartes avanzó en la consolidación de un conjunto de objetos dotados de una estructura algebraica que, en los siglos posteriores, constituirían la base sobre la cual se consolidaría el conjunto de los números reales como un conjunto numérico completo.

En este orden de ideas, se puede concluir que la relación del álgebra literal con las curvas geométricas requirió establecer previamente el isomorfismo entre el cuerpo de los números reales y el campo de los segmentos de recta, requerimiento que en esencia consistía en definir las operaciones con segmentos y principalmente la multiplicación con la propiedad de cerradura. Así mismo, el cambio de dirección en la interrelación del álgebra y la geometría y la mutua penetración metodológica con la ayuda de las coordenadas establecieron un proceso renovador en las matemáticas. En este proceso, uno de los cambios más novedosos lo constituyó el paso de la deducción entre proposiciones, propio del método euclidiano, a la solución de una ecuación, como lo proponía Descartes. Al respecto, Álvarez (2000), afirma que no sólo se trataba de un ejemplo de aplicación de las reglas del método sino del resultado de una nueva lectura de la geometría euclidiana que le permitió a Descartes iniciar, como ya se dijo, el proceso de modernización en las matemáticas.

Juzga Loi (1982/1988) que Descartes abrió las vías de la síntesis algebraica, por cuanto mediante un álgebra clarificada y perfeccionada hizo posible resolver los problemas relativos a las magnitudes y figuras siguiendo un camino seguro y regular. Agrega además, que la distinción entre la ciencia moderna y la geometría antigua está en la seguridad y el rigor del método. Afirma que Descartes puede considerarse como un precursor de Bourbaki ya que, para él, el álgebra no es una colección de resultados sino una técnica, un método de combinación y construcción. Mediante el simple funcionamiento del mecanismo algebraico, permite que surja un mundo geométrico ilimitado que la intuición directa de la figura no hubiese revelado nunca. Así mismo, al rehabilitar el cálculo, que los griegos abandonaron en beneficio de la geometría, Descartes preparó el camino a la matemática formal.

Por su parte, Campos (1997) plantea que mediante la algebrización de la geometría y al explotar la idea de traducir problemas de la misma al lenguaje algebraico, se transmutó la carencia de curvas en una incontenible exhuberancia de estas, cuyo estudio es literalmente inagotable. En síntesis, el aporte genial de Descartes, puntualiza, consistió en haberse dado cuenta de que la nueva herramienta, el álgebra de los árabes, enriquecida hasta Viète, era el método apropiado para plantear y resolver el problema de Pappus, mostrando el álgebra como instrumento de resolución de un problema propuesto en términos de geometría.

REFERENCIAS

Álvarez, C. (2000). Descartes lector de Euclides. En C. Álvarez y R. Martínez (Coords.), *Descartes y la ciencia del siglo XVII*. México: Siglo XXI Editores.

Campos, A. (1997). Descartes, investigador matemático afortunado. En V.S. Albis, J. Charum, C.H. Sánchez y G. Serrano (Eds.) *Memorias del seminario en conmemoración de los 400 años del nacimiento de René Descartes* (pp. 11-24). Bogotá, Colombia: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Descartes, R. (1947). *La Geometría* (Pedro Rossell Soler, Tr.). Buenos Aires, Argentina: Espasa-Calpe Argentina, S.A. (Primera edición en francés, 1637).

Loi, M. (1988). Rigor y ambigüedad. En R. Apéry, M. Caveing, J.-P. Desclés, J. Dieudonné, R. Fraïssé, F. de Gandt, P. Gochet, J.-M. Lévy-Loblond, M. Loi, B. Mandelbrot, J.-C. Pont y R. Thom, *Pensar la matemática* (pp. 275-291, 2ª ed.) (Carlos Bidón-Chanal, Tr.). Barcelona, España: Tusquets Editores, S.A. (Primera edición en francés, 1982).

Malagón, M. y Valoyes L. (2011). El papel de la técnica algebraica cartesiana en los procesos de objetivación de los reales. En L. Recalde y G. Arbeláez (Comps.), *Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica* (pp.103-133). Cali, Colombia: Universidad del Valle.